

MATEMÁTICA – CPU

PRÁCTICA 3

Trigonometría. Resolución de triángulos rectángulos.

1. a) ¿Qué arco representan los siguientes ángulos? $360^\circ, 30^\circ, 180^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 45^\circ, 75^\circ, 240^\circ$.

Graficar sobre una circunferencia de radio 1.

- b) ¿Qué ángulo representan los siguientes arcos? $\pi, 2\pi, \frac{3\pi}{2}, 4\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{6}$.

Graficar sobre una circunferencia de radio 1.

2. Dibujar sobre la circunferencia trigonométrica, un ángulo α en el primer cuadrante, luego trazar en el mismo gráfico los siguientes ángulos: $\pi - \alpha, \pi + \alpha, 2\pi - \alpha$.

Marcar sobre los ejes los valores del seno y coseno para los ángulos dibujados y observando lo realizado escribir:

- a) en función de $\text{sen } \alpha$

i. $\text{sen}(\pi - \alpha) =$

ii. $\text{sen}(\pi + \alpha) =$

iii. $\text{sen}(2\pi - \alpha) =$

- b) en función de $\text{cos } \alpha$

i. $\text{cos}(\pi - \alpha) =$

ii. $\text{cos}(\pi + \alpha) =$

iii. $\text{cos}(2\pi - \alpha) =$

3. Observando la circunferencia trigonométrica, completar la tabla.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{2}{3}\pi$	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{13}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$
$\text{sen } \alpha$		$\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$							
$\text{cos } \alpha$			$\frac{\sqrt{2}}{2}$								
$\text{tg } \alpha$											

4. Los cálculos que se piden son exactos (no aproximar).

- a) Sabiendo que $\text{cos } t = \frac{2}{5}$, decidir en qué cuadrante puede estar t y en cada caso calcular $\text{sen } t$ y $\text{tg } t$.

- b) Sabiendo que $\text{sen } t = -\frac{1}{3}$ y t está en el tercer cuadrante, calcular $\text{cos } t$ y $\text{tg } t$.

- c) Si $\alpha \in (\pi/2, \pi)$ y $\text{cos } \alpha = -\frac{1}{4}$, calcular $\text{tg } \alpha + \text{sen } \alpha$.

- d) Si α pertenece al primer cuadrante y $\text{cos } \alpha = \frac{3}{10}$, calcular $\text{cos}(\alpha - \pi)$ y $\text{sen}(\pi - \alpha)$.

- e) Si $\alpha \in 3^\circ \text{ cuad.}$ y $\text{tg } \alpha = \frac{4}{3}$, calcular $\text{cos } \alpha$ y $\text{sen}(\alpha - \pi)$.

- f) Sabiendo que $\text{cos } \beta = -\frac{1}{5}$ y β es un ángulo del segundo cuadrante, calcular $\text{cos}(\beta + \pi) - \text{sen}^2(\beta)$.

5. Calcular el valor exacto de la expresión $\left(\text{cos } \frac{11\pi}{6} + \text{sen } \frac{\pi}{3}\right) \cdot \left(\text{tg } \frac{5\pi}{6} - \text{sen } \frac{4\pi}{3}\right)$.

6. Encontrar todos los $x \in [0, 2\pi)$ que verifican:

- a) $\text{sen } x = 1/2$ b) $\text{cos } x = 0$ c) $\text{sen } x = 1$ d) $\text{cos } x = 3$
 e) $\text{tg } x = 1$ f) $\text{tg } x = -\sqrt{3}$ g) $\text{cos } x = \sqrt{3}/2$ h) $\text{cos } x = -1$

7. a) Hallar todos los $x \in R$ que cumplen:

- i. $\text{sen } x = 0$ ii. $\text{cos}(4x) = 0$ iii. $\text{sen}(x - \pi/4) = -\sqrt{3}/2$ iv. $2 \text{cos}(2\pi x) = -1$

b) Encontrar tres soluciones distintas de:

- i. $\text{sen}(2x) = 1$ ii. $\text{cos}(\pi x) = 0$

c) Hallar todos los $x \in [0, 3\pi]$

- i. $\text{cos}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$ ii. $4 \text{sen}(2x - \pi) = 2\sqrt{2}$

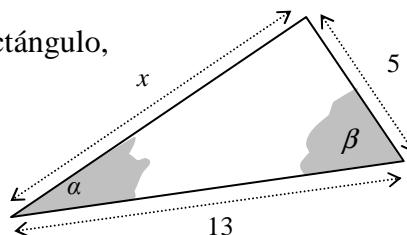
d) Hallar todos los $x \in [-\pi, \pi]$

- i. $\text{tg}(2x) = -1$ ii. $\text{cos}(3x + \pi) = -\sqrt{3}/2$

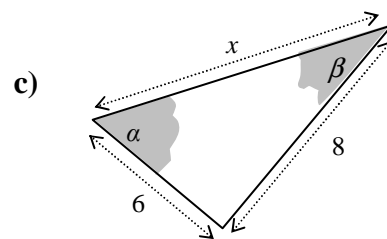
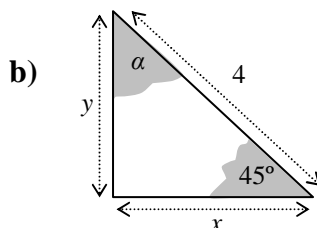
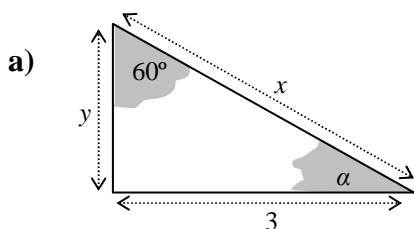
8. Resolver las siguientes ecuaciones.

- a) $2 \text{sen}^2 x - \text{sen } x - 3 = 0$ b) $\text{cos}^2 x - \text{sen}^2 x = -1$
 c) $\text{sen}\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) = -\text{cos}\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$ d) $\text{cos}^2(2x) = 3 \text{cos}(2x)$
 e) $2 \text{sen}^2(3x - \pi) - \text{sen}(3x - \pi) = 0$

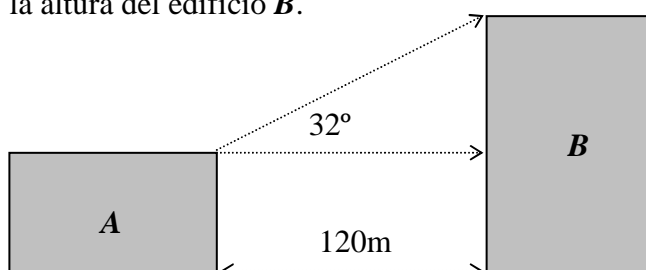
9. Sabiendo que el triángulo dibujado es rectángulo, calcular los valores exactos de x , $\text{cos } \beta$, $\text{sen } \alpha$, $\text{tg } \beta$ y $\text{tg } \alpha$.



10. Calcular los valores exactos de los elementos indicados en los siguientes triángulos rectángulos y su perímetro y su área.

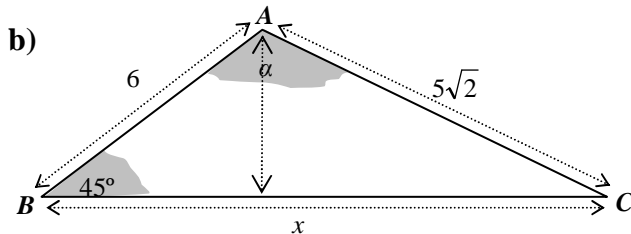
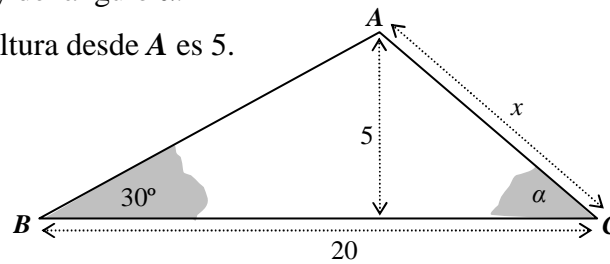


11. La distancia entre los edificios **A** y **B** es de 120m. Si el edificio **A** mide 98m de altura y el ángulo de elevación desde el punto más alto del edificio **A** al punto más alto del edificio **B** es de 32° . Calcular, aproximadamente, la altura del edificio **B**.



12. Hallar las medidas del lado x y del ángulo α .

a) Si además se sabe que la altura desde A es 5.



Más ejercicios...

13. Hallar todos los ángulos $x \in [0, 2\pi)$, que verifican $\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ y $\text{cos}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) > 0$.

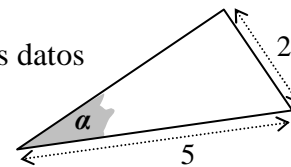
14. a) Encontrar $k \in \mathbb{R}$ para que $x = \frac{25\pi}{12}$ sea solución de la ecuación $3\text{sen}(2x) - k = 7$.

b) Con el valor de k hallado, resolver dicha ecuación.

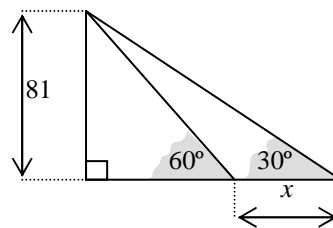
15. a) Hallar todos los $x \in \left[0, \frac{3}{2}\pi\right]$ que satisfacen $2\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1 + 3\text{sen} x$.

b) Hallar todos los $x \in [-2\pi, 3\pi]$ que cumple $2\text{sen}^2 x + 3\text{cos} x = 2$.

16. Encontrar el valor exacto de $\frac{\text{tg}(\alpha) + \text{cos}(\pi - \alpha)}{\text{sen}(\alpha + \pi)}$, de acuerdo a los datos del triángulo rectángulo dibujado.



17. Determinar x en la siguiente figura:



Respuestas

1. a) $360^\circ \leftrightarrow 2\pi$, $30^\circ \leftrightarrow \pi/6$, $180^\circ \leftrightarrow \pi$, $60^\circ \leftrightarrow \pi/3$, $90^\circ \leftrightarrow \pi/2$,
 $120^\circ \leftrightarrow 2\pi/3$, $45^\circ \leftrightarrow \pi/4$, $75^\circ \leftrightarrow 5\pi/12$, $240^\circ \leftrightarrow 4\pi/3$

b) $\pi \leftrightarrow 180^\circ$, $2\pi \leftrightarrow 360^\circ$, $3\pi/2 \leftrightarrow 270^\circ$, $4\pi \leftrightarrow 720^\circ$,
 $\pi/2 \leftrightarrow 90^\circ$, $\pi/5 \leftrightarrow 36^\circ$, $\pi/6 \leftrightarrow 30^\circ$

2. a) i. $\text{sen}(\pi - \alpha) = \text{sen} \alpha$ ii. $\text{sen}(\pi + \alpha) = -\text{sen} \alpha$ iii. $\text{sen}(2\pi - \alpha) = -\text{sen} \alpha$

b) i. $\text{cos}(\pi - \alpha) = -\text{cos} \alpha$ ii. $\text{cos}(\pi + \alpha) = -\text{cos} \alpha$ iii. $\text{cos}(2\pi - \alpha) = \text{cos} \alpha$

3.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{2}{3}\pi$	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{13}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$
$\text{sen } \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\text{cos } \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\text{tg } \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	no existe	0	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	no existe	-1

4. a) t puede estar en el primer o cuarto cuadrante.

Si t está en el 1^{er} cuadrante $\Rightarrow \text{sen } t = \frac{\sqrt{21}}{5}$ y $\text{tg } t = \frac{\sqrt{21}}{2}$

Si t está en el 4^{er} cuadrante $\Rightarrow \text{sen } t = -\frac{\sqrt{21}}{5}$ y $\text{tg } t = -\frac{\sqrt{21}}{2}$ b) $\text{cost} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ y $\text{tg } t = \frac{\sqrt{2}}{4}$

c) $\text{tg } \alpha + \text{sen } \alpha = -\frac{3\sqrt{15}}{4}$ d) $\text{cos}(\alpha - \pi) = -\frac{3}{10}$ y $\text{sen}(\pi - \alpha) = \frac{\sqrt{91}}{10}$

e) $\text{cos } \alpha = -3/5$ y $\text{sen}(\pi - \alpha) = 4/5$ f) $\text{cos}(\alpha + \pi) - \text{sen}^2(\alpha) = -19/25$

5. $\left(\text{cos} \frac{11\pi}{6} + \text{sen} \frac{\pi}{3}\right) \cdot \left(\text{tg} \frac{5\pi}{6} - \text{sen} \frac{4\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}$

6. a) $x = \frac{\pi}{6}$ ó $x = \frac{5\pi}{6}$ b) $x = \frac{\pi}{2}$ ó $x = \frac{3\pi}{2}$ c) $x = \frac{\pi}{2}$ d) No existe x .

e) $x = \frac{\pi}{4}$ ó $x = \frac{5\pi}{4}$. f) $x = \frac{2\pi}{3}$ ó $x = \frac{5\pi}{3}$. g) $x = \frac{\pi}{6}$ ó $x = \frac{11\pi}{6}$. h) $x = \pi$

7. a) i. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. ii. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$.

iii. $x = \frac{19\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ó $x = \frac{23\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. iv. $x = \frac{1}{3} + k, k \in \mathbb{Z}$ ó $x = \frac{2}{3} + k, k \in \mathbb{Z}$.

b) i. Por ejemplo: $x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{5\pi}{9}$ y $x = \frac{9\pi}{4}$. ii. Por ejemplo: $x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}$ y $x = \frac{3}{2}$.

c) i. $x = \frac{2\pi}{3}$ ó $x = \frac{8\pi}{3}$. ii. $x = \frac{5\pi}{8}, x = \frac{7\pi}{8}, x = \frac{13\pi}{8}, x = \frac{15\pi}{8}, x = \frac{21\pi}{8}$ ó $x = \frac{23\pi}{8}$.

d) i. $x = -\frac{5\pi}{8}, x = -\frac{\pi}{8}, x = \frac{3\pi}{8}$ ó $x = \frac{7\pi}{8}$.

ii. $x = -\frac{13\pi}{18}, x = -\frac{11\pi}{18}, x = -\frac{\pi}{18}, x = \frac{\pi}{18}, x = \frac{11\pi}{18}$ ó $x = \frac{13\pi}{18}$.

8. a) $S = \left\{ \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ b) $S = \left\{ \frac{1}{2}\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ c) $S = \left\{ \frac{5}{8} + \frac{k}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

d) $S = \left\{ \frac{1}{4}\pi + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ e) $S = \left\{ \frac{\pi + k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{7}{18}\pi + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{11}{18}\pi + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

9. $x = 12, \text{cos } \beta = 5/13, \text{sen } \alpha = 5/13, \text{tg } \beta = 12/5$ y $\text{tg } \alpha = 5/12$.

10. a) $\alpha = 30^\circ$, $x = 2\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}$, $\text{perímetro} = 3 + 3\sqrt{3}$, $\text{área} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

b) $\alpha = 45^\circ$, $x = 2\sqrt{2}$, $y = 2\sqrt{2}$, $\text{perímetro} = 4 + 4\sqrt{2}$, $\text{área} = 4$.

c) $x = 10$, $\alpha \cong 53^\circ 7' 48''$ $\beta \cong 36^\circ 52' 12''$, $\text{perímetro} = 24$, $\text{área} = 24$.

11. Aproximadamente 173m.

12. a) $x = 10\sqrt{5 - 2\sqrt{3}} \cong 12,39$, $\alpha \cong 23^\circ 48'$ b) $x = 7\sqrt{2}$, $\alpha \cong 98^\circ 7' 48''$

13. $x = \frac{3}{2}\pi$

14. a) $k = -\frac{11}{2}$ b) $S = \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5}{12}\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

15. a) $S = \{0, \pi\}$ b) $S = \left\{ -\frac{3}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi \right\}$

16. $\frac{\text{tg}(\alpha) + \cos(\pi - \alpha)}{\text{sen}(\alpha + \pi)} = \frac{\frac{2}{\sqrt{21}} - \frac{\sqrt{21}}{5}}{-\frac{2}{5}} = \frac{11\sqrt{21}}{42}$

17. $x = 54\sqrt{3}$