MATEMÁTICA – CPU
PRÁCTICA 4
Vectores.

1. Sean $u=(-1,3)$, $v=(2,-5)$, $w=(3,0)$ y $t=(0,-2)$.

a) Graficar u, v, w y t.

b) Calcular y graficar:

i. $-v$ **ii.** $2u+v$ **iii.** $u-2v+3t$ **iv.** $\frac{2}{3}u+2(v-w)$ **v.** $2(v-2t)-\frac{3}{4}(u+3w)$

c) En cada caso, hallar, si es posible, $p, q \in R$ tales que:

i. $3u-pv=(1, q+p)$ **ii.** $pu-3v=qw+(-p,2)$

iii. $p\,w+(q+1)t=v-(q-1,2q)$ **iv.** $p\,u+q\,v=t$

d) En cada caso, hallar $s \in R^2$ tal que:

i. $s-2u=3v$ **ii.** $2s+u=v-3w$ **iii.** $3u-2s=3(s-2u)-w$

2. Si $u=(3,-4)$, $v=(-3,0)$ y $w=(5,1)$, calcular la longitud de los vectores:

a) u, v y w **b)** $u+v$ y $u-w$ **c)** $2u$ y $-3u$

3. En cada caso, determinar todos los valores de *k* para que:

a) $\|u\|=3$ si $u=(-1,k)$ **b)** $\|v\|=13$ si $v=(k-3,5)$ **c)** $\|w\|=1$ si $w=k(-4,3)$

4. **a)** Graficar en el plano y decir qué figura geométrica representan.

i. Todos los vectores de módulo 3.

ii. Todos los vectores de longitud a lo sumo 3.

b) Hallar todos los vectores de norma 2 que están sobre el eje *y*.

5. Dado $v=(3,-4)$, hallar:

a) Un vector *w* con la misma dirección que *v* cuyo longitud sea el doble de la longitud de *v*. ¿Cuántos hay?

b) Un vector *u* paralelo a *v* cuyo módulo sea 2 y tenga sentido opuesto a *v*. ¿Cuántos hay?

6. Si $u=(3,-1), v=(0,2), w=(2,6)$ y $t=(-5,4)$,

a) calcular:

i. $u\,.\,v$ **ii.** $u\,.\,w$ **iii.** $w\,.\,t$ **iv.** $u\,.\,(v-t)$ **v.** $u\,.\,v-u\,.\,t$

b) Encontrar un vector $s \neq t$ que cumpla $u\,.\,s=u\,.\,t$.

7. **a)** Probar que los vectores $i=(1,0)$, $j=(0,1)$, llamados **versores**, tienen módulo 1 y son perpendiculares entre sí.

Observar que cualquier vector (a,b) *se puede expresar como combinación de los versores.*

O sea, $(a,b)=ai+bj$.

b) Expresar los siguientes vectores de la forma $ai+bj$.

$$v=(1/2,3),\ w=(-2,0)\ \text{y}\ t=(0,3).$$

8. Encontrar, analítica y gráficamente:

a) Tres vectores perpendiculares a $u=(3,-2)$. ¿Cuántos hay?

b) Un vector perpendicular a $v=(-4,3)$ de módulo 2. ¿Cuántos hay?

9. Determinar $a \in R$ para que $u = (a+3, 2a-4)$ sea ortogonal a $v = (4,-1)$.

10. Graficar y averiguar el ángulo entre u y v en cada caso.

a) $u = (0,1)$ y $v = (-2,2)$ **b)** $u = i$ y $v = -3i + 3j$ **c)** $u = 5i - 2j$ y $v = 2i + 5j$

d) $u = (2\sqrt{3},2)$ y $v = (\sqrt{3},-1)$ **e)** $u = (2,-4)$ y $v = (-1,2)$ **f)** $u = (3,1)$ y $v = (-3,2)$

11. Sean $v = (2,-3)$ y $w = (3,1)$.

a) Calcular las proyecciones ortogonales sobre los ejes coordenados de :
i. v **ii.** $3w$ **iii.** $v - w$

b) Calcular las proyecciones ortogonales de:
i. v sobre w. **ii.** v sobre $2w$. **iii.** $2v$ sobre w. **iv.** w sobre v.

c) ¿Qué relación hay entre los vectores hallados en **i.** y **ii.**? ¿Podrías justificarlo geométricamente?

d) Ídem **c)** para **i.** y **iii.**

12. En cada caso, encontrar las coordenadas de un vector que cumpla las siguientes condiciones:

a) Forma un ángulo de 60° con el semieje positivo de las x (sentido antihorario) de módulo 3.

b) Forma un ángulo de 150° con el semieje positivo de las x (sentido antihorario) de módulo 1/2.

c) Forma un ángulo de 240° con el semieje positivo de las x (sentido antihorario) de módulo 2.

d) ¿Qué relación hay entre los vectores hallados en **a)** y **b)**?

e) ¿Y entre los hallados en **a)** y **c)**?

13. En cada caso, hallar a de manera que:

a) $v = (2, a)$ forme con el semieje positivo de las x un ángulo de 45°.

b) $w = (a-2, 3)$ forme con el semieje positivo de las x un ángulo de 135°.

c) $s = a\,i - 3j$ forme con el semieje positivo de las x un ángulo de 210°.

d) $t = 3i + aj$ esté en el cuarto cuadrante y verifique $\|t\| = 5$.

14. Determinar a y b para que $u = (a, b)$ forme con el semieje positivo de las x un ángulo de 180° y se cumpla que $\|u\| = 7$.

15. a) Hallar un vector w del segundo cuadrante que sea paralelo al vector $v = 2i - 2j$ y su longitud sea la mitad que la de v.

b) Calcular el módulo de w y el ángulo que forma con el semieje positivo de las x.

c) Encontrar todos los vectores ortogonales a w de norma 1.

16. a) Determinar a para que el vector $u = (3, a)$ forme con el semieje positivo de las x un ángulo de 330°.

b) Para el a encontrado, hallar b para que $(b,1) + u$ sea perpendicular a $(-2,6)$.

17. a) Hallar b sabiendo que vector $v = (1, b)$ está en el cuarto cuadrante y tiene módulo 2.

b) Calcular el ángulo que forma el vector v con el semieje positivo de las x.

c) Encontrar dos vectores perpendiculares a v, con sentidos opuestos y distintas longitudes.

18. Graficar los siguientes vectores de R^3.

$u = (2,0,0)$, $v = (0,3,0)$, $w = (0,0,4)$, $p = (0,3,4)$, $q = (2,0,4)$, $r = (2,3,0)$ y $s = (2,3,4)$.

19. Sean $u = (1,-2,0)$, $v = (2,3,-1)$, $w = (0,2,-4)$ y $s = (2,1,7)$.

a) Calcular: **i.** $u - v$ **ii.** $2u + 3w - s$ **iii.** $2(v - 2w) - 3(s + u)$

b) Calcular los módulos de $v, 3u$ y $2w + s$.

c) Probar que: **i.** $u \perp s$ **ii.** $s \perp v$ **iii.** u y v **no** son paralelos.

Más ejercicios…

20. a) Hallar el vector v si se sabe que está en el segundo cuadrante, tiene norma 5 y su ordenada es 4.
b) Hallar el vector w de norma 1 que forma un ángulo de 45º con el semieje positivo de las x .
c) Teniendo en cuenta los vectores hallados.
i. Determinar dos vectores s y t, de norma 1 y 3 respectivamente, ambos perpendiculares a v y con distintos sentidos.
ii. Elegir c de manera que $w+(0,c)$ sea paralelo a v.

21. Dado $v=2i+2j$, se pide:
a) Calcular $\|v\|$, y el ángulo que forma v con el semieje positivo de las x.
b) Dados $w=a\,i-4j$ y $t=-3i+(b-1)j$, hallar a y b tal que w sea ortogonal a v, y t sea paralelo a v.

22. Dado $v=-i-j$.
a) Calcular el módulo de v y el ángulo que forma con el semieje positivo de las x.
b) Hallar un vector w de módulo 5, con igual dirección y distinto sentido que v.
c) Hallar un vector s del cuarto cuadrante, perpendicular a v, de módulo menor que 1.

23. Dados los vectores $v=4i-3j$ y $w=(-1,-1)$.
a) Calcular el ángulo que forman v y w.
b) Determinar el vector proyección ortogonal de v sobre w.
c) Encontrar $u,t\in R^2$ tal que u y t sean ambos perpendiculares a w, además que u y t tengan distinto módulo e igual sentido.

Respuestas

1. b) i. $-v=(-2,5)$ **ii.** $2u+v=(0,1)$ **iii.** $u-2v+3t=(-5,7)$

iv. $\frac{2}{3}u+2(v-w)=\left(-\frac{8}{3},-8\right)$ **v.** $2(v-2t)-\frac{3}{4}(u+3w)=\left(-2,-\frac{17}{4}\right)$

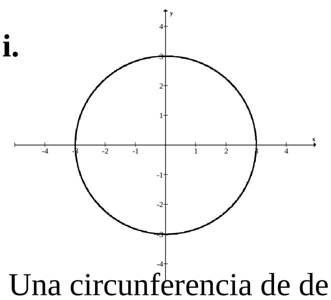
c) i. $p=-2, q=1$ **ii.** $p=-13/3, q=-2$ **iii.** No existen p y q. **iv.** $p=-4, q=-2$

d) i. $s=(4,-9)$ **ii.** $s=(-3,-4)$ **iii.** $s=\left(-\frac{6}{5},\frac{27}{5}\right)$

2. a) $\|u\|=5, \|v\|=3, \|w\|=\sqrt{26}$. **b)** $\|u+v\|=4$, $\|u-w\|=\sqrt{29}$ **c)** $\|2u\|=10, \|-3u\|=15$.

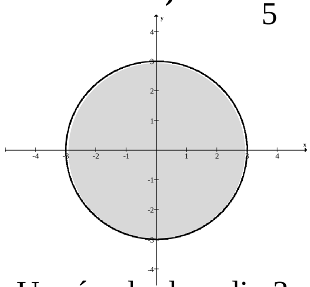
3. a) $k=-\sqrt{8}$ ó $k=\sqrt{8}$. **b)** $k=-9$ ó $k=15$. **c)** $k=-\frac{1}{5}$ ó $k=\frac{1}{5}$.

4. a) i.



Una circunferencia de de radio 3 y centro el origen de coordenadas.

ii.



Un círculo de radio 3 y centro el origen de coordenadas.

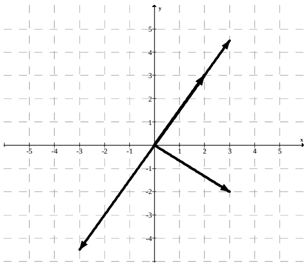
b) $(0,2)$ y $(0,-2)$.

5. a) Por ejemplo: $w=(6,-8)$. Hay dos (el otro posible es $(-6,8)$). **b)** $u=(-6/5, 8/5)$. Es el único.

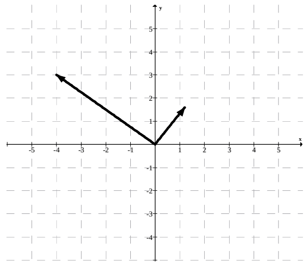
6. a) i. $u\,.\,v=-2$ **ii.** $u\,.\,w=0$ **iii.** $w\,.\,t=14$ **iv.** $u\,.\,(v-t)=17$ **v.** $u\,.\,v-u\,.\,t=17$
b) Por ejemplo, $s=(1,22)$.

7. b) $v = \frac{1}{2} i + 3j$, $w = -2i$ y $t = 3j$.

8. a) Por ejemplo:
$(2,3), (-2,-3), (3, 9/2)$.
Hay infinitos.



b) Por ejemplo:
$(6/5, 8/5)$.
Hay dos, el otro es $(-6/5, -8/5)$.



9. a) $a = -8$

10. a) 45° **b)** 135° **c)** 90° **d)** 60° **e)** 180° **f)** 127º 52´29´´

11. a) i. $proy_{ejex}(v) = (2,0)$, $proy_{ejey}(v) = (0,-3)$ **ii.** $proy_{ejex}(3w) = (9,0)$, $proy_{ejey}(3w) = (0,3)$

iii. $proy_{ejex}(v - w) = (-1,0)$, $proy_{ejey}(v - w) = (0,-4)$

b) i. $proy_w(v) = \left(\frac{9}{10}, \frac{3}{10}\right)$ **ii.** $proy_{2w}(v) = \left(\frac{9}{10}, \frac{3}{10}\right)$ **iii.** $proy_w(2v) = \left(\frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right)$ **iv.** $proy_v(w) = \left(\frac{6}{13}, -\frac{9}{13}\right)$

c) Son el iguales, porque estamos proyectando el mismo vector sobre la misma recta (la recta que contiene a *w* y 2*w* es la misma).

d) $proy_w(2v) = 2\,proy_w(v)$, lo podemos justificar utilizando el Teorema de Thales, o por triángulos semejantes.

12. a) $\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ **b)** $\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}\right)$ **c)** $(-1, -\sqrt{3})$ **d)** Son perpendiculares. **e)** Son paralelos.

13. a) $a = 2$ **b)** $a = -1$ **c)** $a = -3\sqrt{3}$ **d)** $a = -4$

14. $a = -7$ y $b = 0$

15. a) $w = -i + j$ **b)** $\|w\| = \sqrt{2}$ y el ángulo es 135º. **c)** $\left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$ y $\left(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right)$.

16. a) $a = -\sqrt{3}$ **b)** $b = -3\sqrt{3}$

17. a) $b = -\sqrt{3}$ **b)** 300º **c)** Por ejemplo: $(\sqrt{3}, 1)$ y $(-2\sqrt{3}, -2)$.

19. a) i. $u - v = (-1,-5,1)$ **ii.** $2u + 3w - s = (0,1,-19)$ **iii.** $2(v - 2w) - 3(s + u) = (-5,1,-7)$

b) $\|v\| = \sqrt{14}$, $\|3u\| = 3\sqrt{5}$ y $\|2w + s\| = \sqrt{30}$.

c) i. $u.s = (1,-2,0).(2,1,7) = 2 - 2 + 0 = 0 \rightarrow u \perp s$

ii. $s.v = (2,1,7).(2,3,-1) = 4 + 3 - 7 = 0 \rightarrow s \perp v$

iii. Si *u* y *v* fueran paralelos existiría un número *k* tal que $u = k.v$. O sea, tendría que pasar que

$(1,-2,0) = k(2,3,-1) \rightarrow \begin{cases} 1 = 2k \\ -2 = 3k \\ 0 = -k \end{cases}$ de donde , por ejemplo, usando las dos últimas ecuaciones nos

quedaría que $2 = 0$, lo que es absurdo. Por lo tanto, *u* y *v* no son paralelos.

20. a) $v = (-3, 4)$ **b)** $w = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

c) i. $s = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ y $t = \left(-\frac{12}{5}, -\frac{9}{5}\right)$ ó $s = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ y $t = \left(\frac{12}{5}, \frac{9}{5}\right)$ **ii.** $c = -\frac{7\sqrt{2}}{6}$

21. a) $\|v\| = \sqrt{8}$ y el ángulo es 45º. **b)** $a = 4$ y $b = -2$

22. a) $\|v\| = \sqrt{2}$ **b)** $w = \frac{5}{\sqrt{2}} i + \frac{5}{\sqrt{2}} j$ **c)** Por ejemplo, $s = \frac{1}{2\sqrt{2}} i - \frac{1}{2\sqrt{2}} j$.

23. a) 98º 7´48´´ **b)** $proy_w(v) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ **c)** Por ejemplo: $u = (1,-1)$ y $t = (2,-2)$.