MATEMATICA – CPU
Práctica 5
FUNCIONES POLINÓMICAS Y EXPRESIONES RACIONALES

1. Sean los polinomios $p(x)=2x^3-3x^2+5x-4$, $q(x)=x^3-x+1$, $r(x)=\frac{1}{2}x+2$ y $s(x)=3x^2-\frac{1}{4}x-1$.

a) Hallar los polinomios: **i.** $p(x)+q(x)$ **ii.** $r(x)q(x)-3s(x)$ **iii.** $r^2(x)+s(x)$
iv. $r(x)p(x)+q(x)+2x-1$

b) Calcular: **i.** $p(2)$ **ii.** $q(-1)$ **iii.** $(r+s)(-4)$ **iv.** $(p-2q)(0)$ **v.** $(p/q)(0)$

c) Sin hallar los polinomios calcular el grado de: **i.** p^2 **ii.** $3pq$ **iii.** $2p-q$ **iv.** $q-2p$
v. $s(0)p+r(0)q$

d) Encontrar los números reales *a*, *b*, *c* y *d* de manera que $p(x)=a\,q(x)+b\,r(x)+c\,s(x)+d$.

e) Hallar el cociente y resto de dividir:
i. $p(x)$ por $q(x)$. **ii.** $p(x)$ por $s(x)$. **iii.** $p(x)$ por $r(x)$.

2. Hallar, en cada caso, el cociente y el resto de dividir $p(x)$ por $x-a$ haciendo la división entera y usando la regla de Ruffini.

a) $p(x)=2x^4-3x^3+5x-4$, $a=2$.

b) $p(x)=3x^3-x^2+5x+9$, $a=-1$.

3. Hallar el resto de dividir a $p(x)=2x^{27}-x^{14}+5x+2$ por $x-1$.

4. Encontrar *k* si se sabe que el resto de dividir $5x^{23}-2kx^{17}+3x^4+2x+k-7$ por $x+1$ es 3.

5. Determinar *a* y *b* si se sabe que:

a) $p(x)=ax^2+(a+1)x+b$, $p(0)=7$ y el resto de dividir *p* por $x+2$ es 3.

b) $p(x)=x^3+ax^2+bx-8$, $p(2)=0$ y *p* tiene una raíz de multiplicidad 3.

c) $p(x)=ax^3+ax^2+7x+b$ es divisible por $x-1$ y por $x-3$.

6. Hallar todas las raíces reales de los polinomios siguientes:

a) $p(x)=x^3-4x^2-x+4$ si $p(1)=0$

b) $p(x)=x^3-x^2-10x-8$ si $x+1$ es un divisor de *p*.

c) $p(x)=2x^3-x^2-x-3$ sabiendo que 3/2 es raíz de *p*.

d) $p(x)=4x^4-12x^3+7x^2+3x-2$ es divisible por $4x^2-1$.

e) $p(x)=x^4+4x^3-13x^2-40x+48$ si se sabe que -4 es raíz de multiplicidad 2de *p*.

7. Sea $f(x)=3x^3+x^2-12x+k$

a) Hallar *k* y todas las raíces de *f* sabiendo que una de ellas es 2.

b) Para el valor de *k* hallado escribir a *f* como producto de polinomios de grado 1.

8. Sabiendo que $p(x)=x^2-6x+5$ y $q(x)=2x^3-2x^2-32x-40$ tienen una raíz en común, hallar todas las raíces de ambos polinomios, indicar sus multiplicidades y factorizarlos completamente.

9. Dada la función polinómica $f(x)=4x^4-2x^3+cx^2+ax+b$,

a) calcular *a*, *b* y *c* sabiendo que el gráfico de *f* pasa por los puntos $(0,10)$, $(-1/2,0)$ y $(1,0)$.

b) Para los valores hallados, encontrar todas las raíces de *f* y factorizarlo completamente.

10. Dado $f(x)=2x^4+3x^3-6x^2-9x+a$, hallar *a* y los ceros de *f* si se sabe que su gráfico pasa por el origen de coordenadas y $f(-3/2)=0$. Factorizar completamente *f*.

11. Halla a, b y todas las raíces de $p(x)=3x^3+x^2+4ax+b$ si se sabe que 2 es raíz de p y el resto de dividir p por $x+1$ es 6.

12. Sea $f(x)=\dfrac{3x+6}{2x^3+3x^2-8x-12}$

a) Hallar el dominio de f si se sabe que $2\notin Dom(f)$.

b) Encontrar los puntos de corte del gráfico de f con: **i.** el eje x. **ii.** el eje y. **iii.** la recta $y=-1/2$.

13. Construir, si es posible, un polinomio $p(x)$ según se indique. ¿Cuáles de los polinomios hallados son únicos?

a) de grado 2 con raíces -1 y 5.

b) de grado 3 con 2 como raíz doble, 1 como raíz simple y que verifique $p(0)=1$.

c) de grado 3 con una única raíz real 1/2.

d) de grado 1 con raíz 5 y coeficiente principal 2.

e) de grado 3 con una única raíz real 0 y $p(1)=1$.

f) de grado 4 con 0 raíz doble, -1 y 2 raíces simples y $p(1)=0$.

g) de grado 4 con 0 raíz doble, -1 y 2 raíces simples y $p(1)=8$.

h) de grado 3 cuyas únicas raíces sean 2 y 4 y cuyo gráfico pase por el (3,2).

i) de grado mínimo, divisible por $x-1$ y que verifique $p(0)=0$, $p(2)=6$.

j) de grado3, 1 es raiz de $p(x)$, 2 es raiz de multiplicidad 2 de $p(x)$ y $p(3)=6$.

k) de grado mínimo tal que 1 y 2 sean raíces simples, -3 sea raíz doble y $p(0)=12$.

14. Hallar a sabiendo que el polinomio $P(x)=x^3+x^2(1-a)+x(a+2)$ tiene una raíz en común con $Q(x)=x^2-1$. Factorizar $P(x)$ y $Q(x)$.

15. Sea $p(x)=6x^3+x^2-4x+1$

a) Hallar todas de las raíces de p sabiendo que $(x-1/3)$ es un factor de p.

b) Construir un polinomio $q(x)$ de grado 2 que tenga dos raíces en común con $p(x)$ y que satisfaga $q(-1)=4$. ¿Es único q?

16. Calcular todas sus raíces reales de los siguientes funciones polinómicas. Factorizar completamente y determinar sus intervalos de positividad y negatividad.

a) $p(x)=(x-3)(x+2)x$ **b)** $p(x)=(2x-3)(x+5)^2$ **c)** $p(x)=x^3+1$

d) $p(x)=x^4-16$ **e)** $p(x)=\left(x^4-16\right)^2$ **f)** $p(x)=(x-2)^3(x+1)^4(x-3)$

g) $p(x)=-2(x-3)(x+3)^3(3x-5)^2$ **h)** $p(x)=\left(x^2-2\right)^2\left(x^2+2\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$

i) $p(x)=\left(x^3-8\right)(x+3)$ **j)** $p(x)=x^4+4x^2-5$ **k)** $p(x)=x^3+8x-9$

17. Para cada uno de los polinomios p del ejercicio **16.** escribir como un intervalo o unión de intervalos a los conjuntos $A=\{x\in R\,/\,p(x)\geq 0\}$ y $B=\{x\in R\,/\,p(x)\leq 0\}$.

18. Hallar una función polinómica p de grado 3 que cumpla que su positividad sea $(-2,-1)\cup(0,+\infty)$ y que $(1,3)$ pertenezca al gráfico de p.

19. **a)** Hallar k si se sabe que la positividad de $f(x)=2x^3+5x^2-4x+k$ es el intervalo $(3/2,+\infty)$.

b) Determinar ceros y negatividad de f.

20. a) Simplificar $\left(\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right):\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+x-2}$ y expresar como cociente de polinomios de grado menor o igual a 1.

b) Simplificar $\left(1-\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{x+1}\right):\dfrac{x^2-9}{x+1}$ y expresar como cociente de un polinomio de grado 1 sobre uno de grado 2.

c) Probar que para todo $x\neq 2, x\neq -2$ se verifica $\dfrac{x^2}{x^2-4}+\dfrac{1}{x+2}=1+\dfrac{1}{x-2}$

21. Resolver las siguientes ecuaciones. *(Tener en cuente su dominio de definición)*

a) $\dfrac{x^2+1}{x-2}=x-2$ **b)** $\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{2}{x+3}=\dfrac{1+x}{x}$ **c)** $\dfrac{4}{2x-3}-\dfrac{6}{2x^2-3x}=\dfrac{5}{x}$

d) $\dfrac{3x}{x^2-3x+2}+\dfrac{2}{x-1}=-1+\dfrac{2}{x-2}$ **e)** $\dfrac{x^2}{x^2+3x-4}\left(\dfrac{x^2-16}{x^2-4x}\right)-1=3$

f) $\dfrac{x}{x+5}+\dfrac{3}{x-5}=\dfrac{x-2}{x}$ **g)** $\dfrac{3x^2+5x-2}{2x+4}+x=1$ **h)** $\dfrac{(x-3)(x+3)+5}{x-2}=2x$

i) $\dfrac{5x}{x^2-x-6}=\left(\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{3}{x-3}\right)(x^2-3)$ **j)** $\dfrac{2x}{x-3}-\dfrac{3x}{x+3}=\dfrac{x^2+9x}{x^2-9}$

k) $\dfrac{5}{x+2}+\dfrac{28}{x^2-4}=\dfrac{x^2+3x-10}{x^2-4x+4}$ **l)** $\dfrac{x^2+x-6}{x^3-x^2-2x}-1=\dfrac{-2x}{x^2+x}$

Más ejercicios…

22. a) Construir un polinomio *p*, de grado 3, cuya positividad sea $(-\infty,-2)\cup(-2,5)$.

b) Hallar el conjunto de los *x* tales que $p(x)\leq 0$.

23. Construir un polinomio de grado 4 que tenga exactamente 2 raíces reales, una de las cuáles es -1 (raíz simple) y cuyo gráfico pase por el punto $(2,-3)$.

24. a) Hallar $k\in R$ y todas las raíces de $f(x)=(9x^3+18x^2-x+k)(x+2)$ si se sabe que una de ellas es 1/3.

b) Para el valor de *k* hallado factorizar completamente a *f*.

c) Determinar los conjuntos de positividad y negatividad de *f*.

25. Dado $p(x)=x^3-x$. Hallar todos los valores de *x* para los cuales resulta $p(x)>3x$.

26. Sea $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-4x+a}{x^3+bx^2+2x+6}$.

a) Hallar *a* y *b* si se sabe que $-3\notin Dom(f)$ y $(2,0)$ está en el gráfico de *f*.

b) Encontrar dominio y ceros de *f*.

27. Hallar **todos** los polinomio de grado 3 cuyas raíces sean únicamente 2 y -1, y cuyo gráfico pase por el punto $(3,-8)$.

28. a) Determinar el valor de *k* sabiendo que el resto de la división entre $p(x)=4x^3+15x^2+kx-4$ y $q(x)=x+2$ es 0.

b) Para el valor de *k* hallado, determinar todas las raíces de *p* y factorizarlo completamente.

c) Hallar los $x\in R$ tales que $p(x)\geq 0$.

29. Encontrar el valor de *k* si se sabe que el resto de dividir a $p(x)=5x^{17}-x^5+kx^2-7+k$ por $q(x)=x+1$ es 6.

Respuestas

1. a) i. $p(x)+q(x)=3x^3-3x^2+4x-3$ **ii.** $r(x).q(x)-3.s(x)=\frac{1}{2}x^4+2x^3-\frac{19}{2}x^2-\frac{3}{4}x+5$

iii. $r^2(x)+s(x)=\frac{13}{4}x^2+\frac{7}{4}x+3$ **iv.** $r(x)p(x)+q(x)+2x-1=x^4+\frac{7}{2}x^3-\frac{7}{2}x^2+9x-8$

b) i. $p(2)=10$ **ii.** $q(-1)=1$ **iii.** $(r+s)(-4)=48$ **iv.** $(p-2q)(0)=-6$ **v.** $(p/q)(0)=-4$

c) i. $gr(p^2)=6$ **ii.** $gr(3pq)=6$ **iii.** $gr(2p-q)=3$ **iv.** $gr(q-2p)=3$ **v.** $gr(s(0)p+r(0)q)=2$

d) $a=2; b=\frac{27}{2}; c=-1; d=-34$

e) i. cociente, $c(x)=2$ y resto, $r(x)=-3x^2+7x-6$

ii. $c(x)=\frac{2}{3}x-\frac{17}{18}; r(x)=\frac{391}{72}x-\frac{89}{18}$ **iii.** $c(x)=4x^2-22x+98; r(x)=-200$

2. a) $c(x)=2x^3+x^2+2x+9$ y $r(x)=14$ **b)** $c(x)=3x^3-4x+9$ y $r(x)=0$ **3.** El resto es 8.

4. $k=14/3$ **5. a)** $a=-1$ y $b=7$. **b)** $a=-6$ y $b=12$. **c)** $a=-7/17$ y $b=-105/17$.

6. Las raíces reales son: **a)** –1, 1 y 4. **b)** –1, –2 y 4. **c)** 3/2 **d)** –1/2, 1/2, 1 y 2. **e)** –4, 1 y 3.

7. a) $k=-4$ y las raíces de *f* son: –2, –1/3 y 2. **b)** $f(x)=3(x-2)(x+1/3)(x+2)$

8. Las raíces de *p* son: 5 y 1, ambas de multiplicidad 1, $p(x)=(x-5)(x-1)$.

Las raíces de *q* son: 5 de multiplicidad 1 y –2 de multiplicidad 2, $q(x)=2(x-5)(x+2)^2$.

9. a) $a=10$, $b=10$ y $c=-22$

b) Las raíces son: $-1/2, 1, -\sqrt{5}$ y $\sqrt{5}$, $f(x)=4(x-1/2)(x-1)(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$.

10. $a=0$; $C^0=\{0;-3/2;\sqrt{3};-\sqrt{3}\}$; $f(x)=2x(x+3/2)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$.

11. $a=-3$, $b=-4$ y las raíces son: –2, –1/3 y 2.

12. a) $Dom(f)=R-\{-2,-3/2,2\}$

b) i. ϕ **ii.** $(0,-1/2)$ **iii.** $(-1/2,-1/2)$ y $(0,-1/2)$.

13. a) Por ejemplo: $p(x)=3(x-5)(x+1)$, hay infinitos.

Todos son de la forma $p(x)=a(x-5)(x+1)$, con $a\in R-\{0\}$.

b) $p(x)=-\frac{1}{4}(x-1)(x-2)^2$, es el único.

c) Por ejemplo, $p(x)=(x-1/2)(x^2+3)$ ó $p(x)=7(x-1/2)^3$, hay infinitos.

d) $p(x)=2(x-5)$, es el único. **e)** Por ejemplo $p(x)=\frac{1}{3}x(x^2+2)$ ó $p(x)=x^3$, hay infinitos.

f) No existe un polinomio que cumpla esas condiciones.

g) $p(x)=-4x^2(x+1)(x-2)$, es el único

h) $p(x)=-2(x-2)^2(x-4)$ ó $p(x)=2(x-2)(x-4)^2$, hay sólo dos. **i)** $p(x)=3x(x-1)$, es el único.

j) $p(x)=3(x-1)(x-2)^2$, es el único. **k)** $p(x)=\frac{2}{3}(x-1)(x-2)(x+3)^2$, es el único.

14. $a=-1$, $P(x)=x(x+1)^2$ y $Q(x)=(x-1)(x+1)$.

15. a) Las raíces de *p* son: –1, 1/3 y 1/2. **b)** $q(x)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$. Sí, es único, pues –1 no puede ser raíz porque se debe cumplir que $q(-1)=4$.

16. a) Las raíces son: –2, 0 y 3. $p(x)=x(x-3)(x+2); C^+=(-2;0)\cup(3;+\infty); C^-=(-\infty;-2)\cup(0;3)$.

b) Las raíces son: –5 y 3/2. $p(x)=2(x-3/2)(x+5)^2; C^+=(3/2;+\infty); C^-=(-\infty;-5)\cup(-5;3/2)$.

c) La única raíz real es –1. $p(x)=(x+1)(x^2-x+1); C^+=(-1;+\infty); C^-=(-\infty;-1)$.

d) Las raíces son: –4, –2 y 2. $p(x)=(x-2)(x+2)(x^2+4); C^+=(-\infty;-2)\cup(2;+\infty); C^-=(-2;2)$.

e) Las raíces son: –2 y 2. $p(x)=(x-2)^2(x+2)^2(x^2+4)^2; C^+=(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty); C^-=\phi$.

f) Las raíces son: –1, 2 y 3.
$p(x)=(x-2)^3(x+1)^4(x-3); C^+=(-\infty;-1)\cup(-1;2)\cup(3;+\infty); C^-=(2;3)$.

g) Las raíces son: –3, 5/3 y 3.
$p(x)=-18(x+3)^3(x-5/3)^2(x-3); C^+=(-3;5/3)\cup(5/3;3); C^-=(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$

h) Las raíces son: $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$.
$p(x)=\left(x+\sqrt{2}\right)^3\left(x-\sqrt{2}\right)^2(x^2+2); C^+=(-\sqrt{2};\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};+\infty); C^-=(-\infty;-\sqrt{2})$.

i) Las raíces son: –3 y 2.
$p(x)=(x+3)(x-2)(x^2+2x+4); C^+=(-\infty;-3)\cup(2;+\infty); C^-=(-3;2)$.

j) Las raíces son: –1 y 1. $p(x)=(x+1)(x-1)(x^2+5); C^+=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty); C^-=(-1;1)$.

k) La única raíz real es 1. $p(x)=(x-1)(x^2+x+9); C^+=(1;+\infty); C^-=(-\infty;1)$.

17. a) $A=[-2;0]\cup[3;+\infty)$ y $B=(-\infty;-2]\cup[0;3]$. **b)** $A=\{-5\}\cup[3/2;+\infty)$ y $B=(-\infty;3/2]$.
c) $A=[-1;+\infty)$ y $(-\infty;-1]$. **d)** $A=(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$ y $B=[-2;2]$. **e)** $A=R$ y $B=\{-2,2\}$.
f) $A=(-\infty;2]\cup[3;+\infty)$ y $B=[2;3]$. **g)** $A=[-3;3]$ y $B=(-\infty;-3]\cup\{5/3\}\cup[3;+\infty)$.
h) $A=\left[-\sqrt{2};+\infty\right)$ y $B=\left(-\infty;-\sqrt{2}\right]\cup\left\{\sqrt{2}\right\}$. **i)** $A=(-\infty;-3]\cup[2;+\infty)$ y $B=[-3;2]$.
j) $A=(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$ y $B=[-1;1]$. **k)** $A=[1;+\infty)$ y $B=(-\infty;1]$.

18. $p(x)=\frac{1}{2}x(x+2)(x+1)$ **19. a)** $k=-12$ **b)** $C^0=\{-2;3/2\}; C^-=(-\infty;-2)\cup(-2;3/2)$

20. a) $\frac{-1}{x+1}$ **b)** $\frac{x-2}{x^2-4x+3}$

c) $\frac{x^2}{x^2-4}+\frac{1}{x+2}=1+\frac{1}{x-2} \Leftrightarrow \frac{x^2+x-2}{x^2-4}=\frac{x-2+1}{x-2} \Leftrightarrow \frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-2)}=\frac{x-1}{x-2}$, como $x\neq-2$, simplificamos en el primer miembro y nos queda una igualdad.

21. a) $S=\left\{\frac{3}{4}\right\}$ **b)** $S=\left\{-\frac{3}{5}\right\}$ **c)** $S=\phi$ **d)** $S=\{0\}$ **e)** $S=\left\{\frac{4}{3}\right\}$ **f)** $S=\left\{\frac{22}{5}\right\}$
g) $S=\left\{\frac{3}{5}\right\}$ **h)** $S=\phi$ **i)** $S=\{0;2\}$ **j)** $S=\{0\}$ **k)** $S=\{-4\}$ **l)** $S=\{-3/2\}$

22. a) Por ejemplo, $P(x)=-1(x+2)^2(x-5)$. **b)** $\{-2\}\cup[5,+\infty)$

23. Por ejemplo, $P(x)=-\frac{1}{10}x(x^2+1)(x+1)$.

24. a) $k=-2$. Las raíces de *f* son: –2, –1/3 y 1/3. **b)** $f(x)=9(x+2)^2\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$

c) $C^+=(-\infty;-2)\cup\left(-2;-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3};+\infty\right); C^-=\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

25. $x\in(-2;0)\cup(2;+\infty)$ **26. a)** $a=-12$ y $b=3$. **b)** $Dom(f)=R-\{-3\}$; $C^0=\{-2,2,3\}$

27. $p_1(x)=-2(x-2)^2(x+1)$ y $p_2(x)=-\frac{1}{2}(x-2)(x+1)^2$

28. a) $k=12$ **b)** Las raíces son: –2 y 1/4. $p(x)=4\left(x-\frac{1}{4}\right)(x+2)^2$ **c)** $x\in\left[\frac{1}{4};+\infty\right)$ **29.** $k=17/2$