MATEMATICA – CPU
Práctica 7
FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

1. A partir del gráfico de $f(x)=2^x$**,** dibujar aproximadamente las siguientes funciones y encontrar dominio, imagen y asíntota horizontal de cada una.

a) $g(x)=2^x+1$ **b)** $h(x)=2^{x-3}$ **c)** $i(x)=2^{x-3}+1$

d) $j(x)=2^{-x}$ **e)** $k(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ **f)** $l(x)=-2^x$

2. Hallar dominio, imagen, asíntotas de *f* y puntos de intersección del gráfico de *f* con los ejes coordenados. Con los datos obtenidos rea1izar un gráfico aproximado. Observando el gráfico encontrar sus conjuntos de positividad y negatividad.

a) $f(x)=2^{x+1}-4$ **b)** $f(x)=3^{x-1}+1$ **c)** $f(x)=e^x$ **d)** $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-2$

3. Sean $f(x)=2^{x-1}$ y $g(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{x+2}$

a) Rea1izar un gráfico aproximado de *f* y *g*, y hallar analíticamente el punto de intersección de dichos gráficos.
b) Observando el gráfico, escribir como un intervalo el conjunto $\{x\in R/\ f(x)<g(x)\}$.

4. Dada $f(x)=5^{x+1}$,

a) hallar analíticamente el punto de intersección del gráfico de *f* y la recta de ecuación $y=\frac{1}{5}$.

b) Rea1izar un gráfico aproximado de *f* y la recta.

c) Escribir como un intervalo el conjunto $\left\{x\in R/\ f(x)\le\frac{1}{5}\right\}$

5. Sea $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2}-1$.

a) Hallar analíticamente los puntos de corte del gráfico de *f* con:
i. El eje *x*. **ii.** El eje *y*. **iii.** La recta $x=-1$.

iv. La recta $y=-1$. **v.** La recta $y=-\frac{19}{27}$.

b) Encontrar $k\in R$ para que $2k+3f(-1)=k+2$

c) Determinar todos los $a\in R$ que verifiquen $f(3a-1)=\frac{5}{4}$.

6. Reso1ver las siguientes ecuaciones.

a) $5^{2x}=\frac{1}{\sqrt{125}}$ **b)** $2^{x-4}=\sqrt{32^{x+2}}$ **c)** $9^{2x}.3=\frac{27^x}{3^{x+5}}$ **d)** $7.4^{x+2}-5.4^{x+2}=\frac{1}{8}$

e) $3^{2x}-8.3^x-9=0$ **f)** $25^x+5^{x+1}+6=0$ **g)** $4-3e^{-x}=e^{-2x}$ **h)** $2.4^x-2.4^{-x}-3=0$

i) $2^{x+1}+2^{2-x}=9$ **j)** $(2^x-8)(x^2-8)=0$ **k)** $3.5-15.5^{2x}=0$

l) $\left(\left(\frac{7}{3}\right)^{5-x^2}-\left(\frac{9}{49}\right)^2\right).e^{x+3}=0$ **m)** $2x.6^{2x-1}+7.6^{2x-1}=0$ **n)** $\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}=4^x$

7. Calcular su dominio y hallar los puntos de corte del gráfico de la función *f* con los ejes coordenados.

a) $f(x)=4^x-2^x$ **b)** $f(x)=9\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+4}-1$ **c)** $f(x)=\frac{\sqrt{2^{3x-2}}-4}{x^2-4}$

d) $f(x)=4^x-3\,.\,2^{x+1}+8$ **e)** $f(x)=\frac{\frac{5}{4}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-4}-\frac{9}{4}}+1$

8. Calcular sin usar calculadora:

a) $log_3 27$ **b)** $log_2\left(\frac{1}{8}\right)$ **c)** $log_4\left(\frac{1}{8}\right)$ **d)** $log_{\left(\frac{1}{3}\right)}\sqrt{27}$ **e)** $log\,60-log\,6000$

f) $ln\left(e^7\right)$ **g)** $ln^7\,e$ **h)** $ln\,2+ln\left(\frac{1}{2}\right)$ **i)** $log_2\left(\frac{4}{5}\right)+log_2\left(\frac{5}{8}\right)$

9. Si se sabe que $\log_a x=0{,}2$ y que $\log_a y=0{,}3$, calcular:

a) $log_a(x.y)$ **b)** $log_a\left(\frac{x^3}{y}\right)$ **c)** $log_a\left(xy^2\right)^3$ **d)** $log_a\left(\frac{1}{y}\right)$ **e)** $log_a\left(\sqrt{x}\right)$

f) $log_a(ax)$ **g)** $log_a\left[\left(\frac{y}{a}\right)^2\right]$ **h)** $log_{a^2}\left(x^2\right)$ **i)** $log_x a$ **j)** $log_x y$

10. A partir de los gráficos de *f* del ejercicio **2**, realizar, en cada caso el gráfico de f^{-1}, encontrar el dominio, imagen, asíntotas y puntos de intersección del gráfico de f^{-1} y hallar analíticamente $f^{-1}(x)$.

11. Hallar dominio, imagen, asíntotas de *f* y puntos de intersección del gráfico de *f* con los ejes coordenadas. Con los datos obtenidos realizar un gráfico aproximado. Observando el gráfico encontrar sus conjuntos de positividad y negatividad.

a) $f(x)=log_2(x-3)$ **b)** $f(x)=1+log_{\left(\frac{1}{2}\right)}x$ **c)** $f(x)=-2+log_3(x+1)$

12. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $log_3(x-7)=4$ **b)** $log_x 5=2$

c) $log_{x+3}\left(x^2\right)=2$ **d)** $log\left(x^2+3x+3\right)=0$

e) $ln\left(x^2-5x+e\right)=1$ **f)** $(2-log(5x))(log_7(x-4))=0$

g) $log_4(x+2)+log_4(x+8)=2$ **h)** $log_2(x+2)=3+log_2(1-x)$

i) $log_3(x-9)^5-5\,log_3(x-7)=5$ **j)** $log_2\left(8x^2\right)-3\,log_2 x=log_{(1/3)}81$

k) $2^x=5$ **l)** $6^{x-4}=7$

m) $3^x=8-3^x$ **n)** $log^2(3x-6)+log\left((3x-6)^2\right)-3=0$

ñ) $6.2^{-x}+1=2^x$ **o)** $\left(log_2 4+log_2\frac{1}{2}\right)ln\,x=3$

13. Hallar el dominio natural y puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones.

a) $f(x)=ln(6-3x)$

b) $f(x)=\dfrac{x^2-25}{ln(3-x)}$

c) $f(x)=log(2x+3)+log(4-x)-2$

d) $f(x)=log_3(|x|-4)-2$

e) $f(x)=log_3(|x-4|)-2$

Más ejercicios…

14. Sea $f(x)=log_3(x+9)+1$.

a) Encontrar dominio, imagen, asíntota de *f* y puntos de intersección del su gráfico con los ejes coordenados. Con los datos obtenidos realizar un gráfico aproximado de *f*.

b) Realizar un gráfico de f^{-1} y hallar su dominio, imagen, asíntota, puntos de intersección con los ejes y la expresión de $f^{-1}(x)$.

15. Sea $f(x)=ln(2x+b)$. ¿Para cuáles valores de *b* el punto $(1,2)$ pertenece al grafico de f^{-1}?

16. Sea $h(x)=log_3(2x+3)+ax+b$. ¿Para cuáles valores de *a* y *b* el punto $(-1,3)$ está en el gráfico de *h* y de h^{-1} simultáneamente?

17. a) Determinar todos los valores de $a\in R$ si se sabe que 5 es una solución de la ecuación $log_{(1-a)}(2x^2-1)=2$.

b) Para alguno de los valores hallados, resolver la ecuación.

18. Dadas $f(x)=log_2(2-x)$, $g(x)=|3x+1|$ y $h=f\circ g$, hallar dominio de *h* y resolver $h(x)=-1$.

19. Sea $g(x)=\dfrac{3}{log_9(2x-1)}$. Hallar domino de *g* y resolver $g(x)=6$.

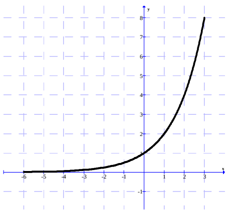
20. Dada la ecuación $\left(3^x+\dfrac{27}{3^x}+b\right)(x-log_4(b+14))=0$.

a) Encontrar los valores de *b* para los cuales $x=1$ es solución de la ecuación.

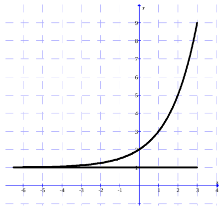
b) Resolver la ecuación para $b=-12$.

Respuestas

1.



a)

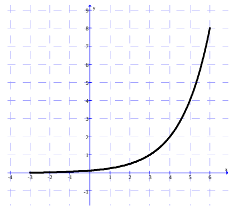


$Dom(g)=R$

$Im(g)=(1,+\infty)$

A. horizontal: $y=1$

b)

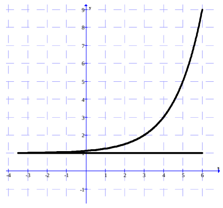


$Dom(h)=R$

$Im(h)=(0,+\infty)$

A. horizontal: $y=0$

c)

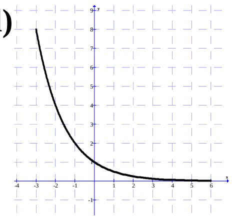


$Dom(i)=R$

$Im(i)=(1,+\infty)$

A. horizontal: $y=1$

d)

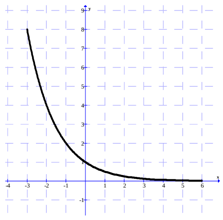


$Dom(j)=R$

$Im(j)=(0,+\infty)$

A. horizontal: $y=0$

e)

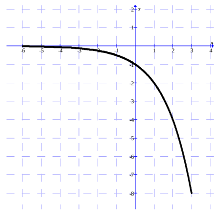


$Dom(k)=R$

$Im(k)=(0,+\infty)$

A. horizontal: $y=0$

f)



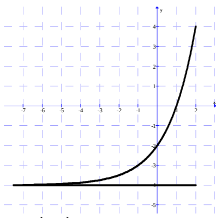
$Dom(l)=R$

$Im(l)=(-\infty,0)$

A. horizontal: $y=0$

Observar que j y k son la misma función, pues $2^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$.

2. a)



$Dom(f)=R$

$Im(f)=(-4,+\infty)$

A. horizontal: $y=-4$

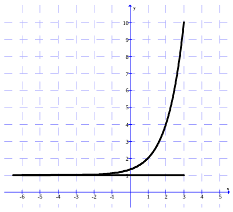
p. de corte eje *x*: $(1,0)$

p. de corte eje *y*: $(0,-2)$

$C^{+}=(1,+\infty)$

$C^{-}=(-\infty,1)$

b)



$Dom(f)=R$

$Im(f)=(1,+\infty)$

A. horizontal: $y=1$

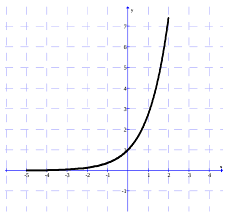
No corta al eje *x*.

p. de corte eje *y*: $(0,4/3)$

$C^{+}=R$

$C^{-}=\phi$

c)



$Dom(f)=R$

$Im(f)=(0,+\infty)$

A. horizontal: $y=0$

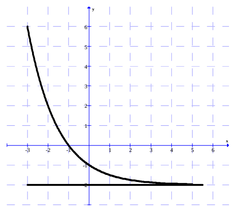
No corta al eje *x*.

p. de corte eje *y*: $(0,1)$

$C^{+}=R$

$C^{-}=\phi$

d)



$Dom(f)=R$

$Im(f)=(-2,+\infty)$

A. horizontal: $y=-2$

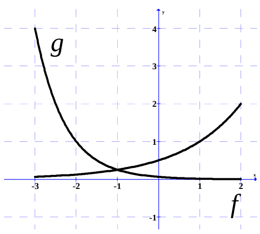
p. de corte eje *x*: $(-1,0)$

p. de corte eje *y*: $(0,-1)$

$C^{+}=(-\infty,-1)$

$C^{-}=(-1,+\infty)$

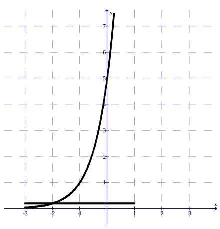
3.



a) Punto de intersección de los gráficos: $(-1,1/4)$.

b) $(-\infty,-1)$

4. a) $(-2,1/5)$ **b)**



c) $(-\infty,-2]$

5. a) i. $(-2,0)$ **ii.** $(0,-5/9)$ **iii.** $(-1,-1/3)$ **iv.** No se cortan. **v.** $(1,-19/27)$

b) $k=3$ **c)** $a=-1$

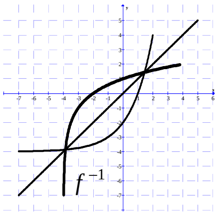
6. a) $S=\{-3/4\}$ **b)** $S=\{-6\}$ **c)** $S=\{-3\}$ **d)** $S=\{-4\}$ **e)** $S=\{2\}$ **f)** $S=\phi$ **g)** $S=\{0\}$
h) $S=\{1/2\}$ **i)** $S=\{-1,2\}$ **j)** $S=\{-\sqrt{8},\sqrt{8},3\}$ **k)** $S=\{0\}$ **l)** $S=\{-3,3\}$ **m)** $S=\{-7/2\}$ **n)** $S=\{-1/6\}$

7. a) $Dom(f)=R$, p. de corte eje *x*: $(0,0)$, p. de corte eje *y*: $(0,0)$.
b) $Dom(f)=R$, p. de corte eje *x*: $(-1,0)$, p. de corte eje *y*: $(0,-8/9)$.
c) $Dom(f)=R-\{-2;2\}$, no corta al eje *x*, p. de corte eje *y*: $(0,-7/2)$.
d) $Dom(f)=R$, p. de corte eje *x*: $(1,0)$ y $(2,0)$, p. de corte eje *y*: $(0,3)$.
e) $Dom(f)=R-\{2/3\}$, p. de corte eje *x*: $(4/3,0)$, p. de corte eje *y*: $(0,13/9)$.

8. a) 3 **b)** –3 **c)** –3/2 **d)** –3/2 **e)** –2 **f)** 7 **g)** 1 **h)** 0 **i)** –1

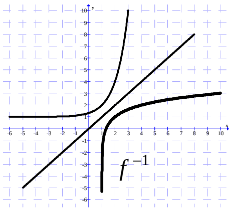
9. a) 0,5 **b)** 0,3 **c)** 2,4 **d)** –0,3 **e)** 0,1 **f)** 1,2 **g)** –1,4 **h)** 0,2 **i)** 5 **j)** 1,5

10. a)



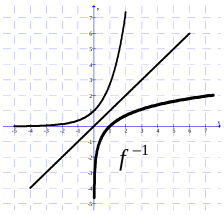
$Dom(f^{-1})=(-4,+\infty)$, $Im(f^{-1})=R$, asíntota vertical: $x=-4$,
punto de corte con el eje *x*: $(-2,0)$,
punto de corte con el eje *y*: $(0,1)$, $f^{-1}(x)=log_2(x+4)-1$.

b)



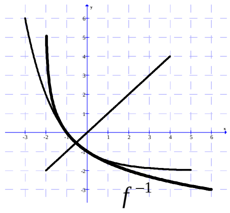
$Dom(f^{-1})=(1,+\infty)$, $Im(f^{-1})=R$, asíntota vertical: $x=1$,
punto de corte con el eje *x*: $(4/3,0)$,
punto de corte con el eje *y*: no tiene, $f^{-1}(x)=log_3(x-1)+1$.

c)



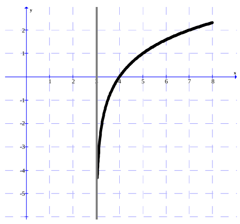
$Dom(f^{-1})=(0,+\infty)$, $Im(f^{-1})=R$, asíntota vertical: $x=0$,
punto de corte con el eje *x*: $(1,0)$,
punto de corte con el eje *y*: no tiene, $f^{-1}(x)=ln(x)$.

d)



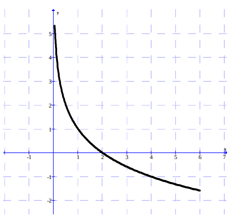
$Dom(f^{-1})=(-2,+\infty)$, $Im(f^{-1})=R$, asíntota vertical: $x=-2$,
punto de corte con el eje *x*: $(-1,0)$,
punto de corte con el eje *y*: $(0,-1)$, $f^{-1}(x)=log_{\left(\frac{1}{2}\right)}(x+2)$.

11. a)



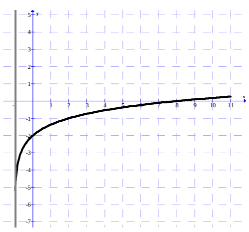
$Dom(f)=(3,+\infty)$, $Im(f)=R$, asíntota vertical: $x=3$,
punto de corte con el eje *x*: $(4,0)$,
punto de corte con el eje *y*: no tiene,
$C^+=(4,+\infty), C^-=(3,4)$.

b)



$Dom(f)=(0,+\infty)$, $Im(f)=R$, asíntota vertical: $x=0$,
punto de corte con el eje *x*: $(2,0)$,
punto de corte con el eje *y*: no tiene,
$C^+=(0,2), C^-=(2,+\infty)$.

c)



$Dom(f)=(-1,+\infty)$, $Im(f)=R$, asíntota vertical: $x=-1$,
punto de corte con el eje *x*: $(8,0)$,
punto de corte con el eje *y*: $(0,-2)$,
$C^+=(8,+\infty), C^-=(-1,8)$.

12. a) $S=\{88\}$ **b)** $S=\{\sqrt{5}\}$ **c)** $S=\{-3/2\}$ **d)** $S=\{-2,-1\}$ **e)** $S=\{0,5\}$ **f)** $S=\{20,5\}$

g) $S=\{0\}$ **h)** $S=\{2/3\}$ **i)** $S=\phi$ **j)** $S=\{128\}$ **k)** $S=\left\{\frac{ln 5}{ln 2}\right\}$ **l)** $S=\left\{\frac{ln 7}{ln 6}+4\right\}$

m) $S=\left\{\frac{ln 4}{ln 3}\right\}$ **n)** $S=\{16/3, 6001/3000\}$ **ñ)** $S=\left\{\frac{ln 3}{ln 2}\right\}$ **o)** $S=\{e^3\}$

13.a) $Dom(f)=(-\infty,2)$, punto de corte con eje *x*: $\left(\frac{5}{3},0\right)$, punto de corte con eje *y*: $(0,ln 6)$

b) $Dom(f)=(-\infty,3)-\{2\}$, punto de corte con eje *x*: $(-5,0)$, punto de corte con eje *y*: $\left(0,-\frac{25}{ln 3}\right)$

c) $Dom(f)=\left(-\frac{3}{2},4\right)$, no corta al eje *x*, punto de corte con eje *y*: $(0,log 12-2)$

d) $Dom(f)=(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$, puntos de corte con eje *x*: $(-13,0)$ y $(13,0)$, no corta al eje *y*.

e) $Dom(f)=R-\{4\}$, puntos de corte con eje *x*: $(-5,0)$ y $(13,0)$, punto de corte con eje *y*: $(0,log_3 4-2)$

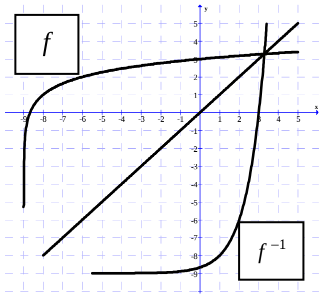
14. a) $Dom(f)=(-9,+\infty),\ Im(f)=R,$ A.V.: $x=-9,$

p. de c. con eje $x: (-26/3,0)$, p. de c. con eje $y: (0,3)$.

b) $Dom(f^{-1})=R,\ Im(f^{-1})=(-9,+\infty),$ A.H.: $y=-9,$

$f^{-1}(x)=3^{x-1}-9$

p. de c. con eje $x: (3,0)$, p. de c. con eje $y: (0,-26/3)$.



15. $b=e-4$

16. $a=-3/2$ y $b=3/2$

17. a) $a=-6$ **b)** $S=\{-5;5\}$

18. $Dom(h)=\left(-1,\frac{1}{3}\right),\ S=\left\{-\frac{5}{6};\frac{1}{6}\right\}$

19. $Dom(g)=\left(\frac{1}{2},+\infty\right)-\{1\},\ S=\{2\}$

20. a) $b=-12$ ó $b=-10$ **b)** $S=\left\{\frac{1}{2};1;2\right\}$